Option Sciences Physiques (P')

MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

Toutes les parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Les théorèmes et résultats utilisés dans la solution du problème doivent être énoncés d'une manière précise et complète.

Les candidats pourront utiliser du papier millimétré.

Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs. On désigne par E l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, ayant un ensemble fini (ou vide) de points de discontinuité.

Soit f un élément de E, p le nombre de ses points de discontinuité, $a_1, a_2, \ldots, a_p$, les points de discontinuité de f rangés en ordre croissant, $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$; si $p \geqslant 1$, on dira que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si chacune des $p+1$ intégrales

$$\int_{-\infty}^{a_1} f(x)\,dx \ , \quad \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx \ , \quad \ldots \ ; \quad \int_{a_{p-1}}^{a_p} f(x)\,dx \ , \quad \int_{a_p}^{+\infty} f(x)\,dx$$

est convergente, et on pose alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_p}^{+\infty} f(x)\,dx$$

E_1 désignera l'ensemble des fonctions f appartenant à E telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

est convergente; pour f appartenant à E_1, on pose :

$$N_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Soient f et g deux éléments de E; on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction notée $f * g$ de la façon suivante :

— pour tout réel x tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ converge, on pose

$$(1) \qquad f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

— pour tout réel x tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ diverge, on pose

$$f * g(x) = 0.$$

I

Étude d'un exemple.

Soient α et β deux nombres réels strictement positifs, $\beta \geqslant 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(\log|x|)^2} & , \text{ pour } x \in]-\infty\ ,\ -1] \\ \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{|x|^\alpha} & , \text{ pour } x \in]-1\ ,\ 0[\\ n^{1+\beta}\left(x-n+\dfrac{1}{n^\beta}\right) & , \text{ pour } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \text{ et } x \in \left[n-\dfrac{1}{n^\beta}\ ,\ n\right] \\ n^{1+\beta}\left(-x+n+\dfrac{1}{n^\beta}\right), & \text{ pour } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \text{ et } x \in \left[n\ ,\ n+\dfrac{1}{n^\beta}\right] \\ 0\ , \text{ pour } x \in [0\ ,\ 2-\dfrac{1}{2^\beta}] \cup \left(\underset{n\geqslant 2}{\cup}]n+\dfrac{1}{n^\beta}\ ,\ n+1-\dfrac{1}{(n+1)^\beta}\ [\right) \end{cases}$$

Donner l'allure du graphe de f pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\beta = 1$.

Pour quelles valeurs de α et β la fonction f appartient-elle à E_1? .../...

M 22
E.N.S. SAINT-CLOUD & FONTENAY 1978

II

1. On appelle support strict d'une fonction f appartenant à E, et on le note $S(f)$, l'ensemble des points x de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq 0$. Montrer que si f et g sont éléments de E

$$S(f*g) \subset S(f) + S(g)$$

$\big(S(f) + S(g)$ désigne l'ensemble de points de la forme $x + y$, quand x parcourt $S(f)$ et y parcourt $S(g)\big)$.

2. On désigne par K l'espace vectoriel réel des fonctions continues réelles définies sur $\mathbb{R}$ et nulles en dehors d'un ensemble borné.

Vérifier que toute fonction h appartenant à K est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et appartient à E_1. Montrer que si f et g sont deux éléments de K, $f*g$ est aussi un élément de K.

III

1. Pour tout nombre réel strictement positif ε, Δ_ε désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\Delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{\varepsilon} & \text{, pour } x \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ 0 & \text{, pour } |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Soient ε_1 et ε_2 deux nombres réels tels que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$. Calculer $\Delta_{\varepsilon_1} * \Delta_{\varepsilon_2}(0)$. Déterminer la parité et le support strict de $\Delta_{\varepsilon_1} * \Delta_{\varepsilon_2}$. (Le support strict d'une fonction de E a été défini dans la question II-1.).

2. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{n}\,\Delta_{\frac{1}{n^2}}(x-n) & \text{, pour } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \text{ et } x \in \left[n - \dfrac{1}{2}, n + \dfrac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{, pour } x \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[. \end{cases}$$

$g(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Vérifier que f et g sont éléments de E_1. Établir que $f*g$ est une fonction paire. Montrer que pour tout nombre entier relatif k, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(k-t)g(t)\,dt$$

est divergente et que par conséquent $f * g(k) = 0$.

3. Soient k un entier positif ou nul et x_0 un nombre réel tel que $0 < x_0 < 1$. Montrer que $f * g(k + x_0)$ est définie par la formule (1).

4. La fonction $f * g$ est-elle continue aux points entiers ? $f * g$ appartient-elle à E_1 ?

IV

On désigne par E_2 l'ensemble des fonctions bornées appartenant à E, et, pour g élément de E_2, on note $N_2(g)$ la borne supérieure de l'ensemble

$$\{|g(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

On se propose d'étudier $f * g$ lorsque f appartient à E_1 et g appartient à E_2.

1. Montrer que si f est élément de E_1 et g élément de E_2, $f * g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}$ par la formule (1) et que pour tout réel x,

$$|f * g(x)| \leqslant N_1(f)\,N_2(g).$$

On suppose de plus que f est élément de l'ensemble K défini dans la question II.2. Montrer qu'alors $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et que

$$N_2(f * g) \leqslant N_1(f)\,N_2(g).$$

2. Soit f appartenant à E_1 ; on suppose que f a un seul point de discontinuité a_1. Soit n_0 un entier positif tel que $n_0 \geqslant |a_1| + 2$, et soit $(\varepsilon_n)_{n \geqslant n_0}$, une suite de nombres réels telle que $0 < \varepsilon_n < \dfrac{1}{2n}$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. Pour $n \geqslant n_0$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

.../...

$f_n(x) = f(x)$, pour $x \in [-n,\ a_1 - \frac{1}{n}] \cup [a_1 + \frac{1}{n},\ n]$

$f_n(x) = 0$,

pour $x \in]-\infty, -n-\varepsilon_n] \cup [a_1 - \frac{1}{n} + \varepsilon_n,\ a_1 + \frac{1}{n} - \varepsilon_n] \cup [n+\varepsilon_n,\ +\infty[$

f_n est affine sur chacun des quatre intervalles suivants :

$[-n-\varepsilon_n\ ,\ -n]$, $[a_1 - \frac{1}{n}\ ,\ a_1 - \frac{1}{n} + \varepsilon_n]$,

$[a_1 + \frac{1}{n} - \varepsilon_n\ ,\ a_1 + \frac{1}{n}]$, $[n\ ,\ n+\varepsilon_n]$,

et f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'on peut déterminer une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq n_o}$ de telle façon que $\lim_{n \to \infty} N_1(f - f_n) = 0$.

3. Soit f élément de E_1. Montrer brièvement, par une construction analogue à celle de la question précédente, que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction h appartenant à K telle que $N_1(f - h) < \varepsilon$.

4. Soient f un élément de E_1 et g un élément de E_2. Déduire des questions IV-1 et IV-3 que $f * g$ est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et que $N_2(f * g) \leqslant N_1(f) N_2(g)$.

On suppose de plus que g appartient à $E_1 \cap E_2$. En admettant l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)|\,dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)|\,dx \right) dt.$$

Montrer que $f * g$ est élément de E_1 et que $N_1(f * g) \leqslant N_1(f) N_1(g)$.

Peut-on avoir l'égalité ?

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail